DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.04.007

基于分数阶模型的相空间中非保守力学系统的 Noether 准对称性*

何胜鑫，朱建青
（苏州科技学院数理学院，江苏 苏州 215009）

摘　要：提出并讨论了相空间中非保守力学系统的分数阶 Noether 对称性与守恒量。给出非保守 Hamilton 系统的分数阶 Hamilton 原理，建立了分数阶 Hamilton 正则方程；依据分数阶 Hamilton 作用量在无限小群变换下的不变性，得到了非保守相空间中分数阶 Noether 准对称变换的定义和判据，建立了非保守相空间中分数阶 Noether 准对称性与守恒量之间的联系，得到了相空间中分数阶守恒量；讨论了不存在非势广义力或规范函数等于零的特例，并举例说明结果的应用。

关键词：分数阶模型；相空间；Noether 准对称性；守恒量

中图分类号：O316，O175　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2015）04－0037－07

Noether Quasi-Symmetry for Nonconservative Mechanical System in Phase Space Based on Fractional Models

HE Shengxin, *ZHU Jianqing*
(College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: The fractional Noether symmetries and fractional conserved quantities for a non-conservative system in phase space are proposed and discussed. Firstly, the fractional Hamilton canonical equations for the non-conservative system are established. Secondly, based upon the invariance of the fractional Hamilton action under the infinitesimal transformations of group, the definitions and criterion of fractional Noether quasi-symmetric transformations are obtained, then the relationship between a fractional Noether symmetry and a fractional conserved quantity of nonconservative system in phase space is established, and the fractional conserved quantity is obtained. Finally, the special cases, which the generalized nonpotential forces are not exit or the gauge function is equal to zero, are discussed. At the end, two examples are given to illustrate the application of the results.

Key words: fractional model; phase space; Noether quasi-symmetry; conserved quantity

自 1695 年 Leibniz 与 L'Hospital 提出分数阶问题以来，至今已有 300 多年的历史。但是关于分数阶问题的研究发展一直都很缓慢。直到 1974 年，才出版了第一本关于分数阶的书本[1]；1993 年，出版了国际上第一本关于分数阶的百科全书[2]。最近几十年来，关于分数阶变分问题的研究得到越来越广泛的关注[3-6]。1996 年，Riewe[7-8] 首次将分数阶微积分应用于非保守力学建模。他的研究开启了国内外学者研究分数阶问题的热潮。随后，得到了很多关于分数阶模型（Riemann-Liouville，Ca-

* **收稿日期：**2014－10－08
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11272227）；苏州科技学院研究生科研创新计划资助项目（SKCX14_057）
作者简介：何胜鑫（1990 年生），女；**研究方向：**力学中的数学方法；**通讯作者：**朱建青；E-mail：zjq@mail.usts.edu.cn

puto，Rizse 分数阶导数定义）下的变分问题的研究成果[9-17]。2007 年，Frederico 和 Torres[18-22] 研究了分数阶模型下的分数阶变分与最优化问题的 Noether 定理，并给出了一种分数阶守恒量的定义；Atanackovi ć[23] 等依据经典的守恒量定义研究了基于 Riemann-Liouville 分数阶导数定义下的变分不变性，建立了系统的 Noether 定理。近年来，基于分数阶模型的 Noether 对称性与守恒量的研究已经取得了一些重要进展[24-33]。但是，研究主要限于 Noether 对称性，而对于 Noether 准对称性的研究较少。本文基于分数阶模型进一步研究相空间中非保守系统动力学的 Noether 定理。文章采用经典守恒量定义，给出相空间中非保守力学系统分数阶 Noether 准对称性的定义和判据，建立了分数阶 Noether 定理。

1 Riemann-Liouville 分数阶导数的定义和一些性质

本节，主要给出将要用到的分数阶导数的定义和一些性质。详细的讨论和证明可以查阅文献［1-4］。

Riemann-Liouville 分数阶左导数定义为

$$ {}_{t_1}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1} $$

Riemann-Liouville 分数阶右导数定义为

$$ {}_{t}D_{t_2}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_{t}^{t_2} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2} $$

其中 $\Gamma(*)$ 为 Gamma 函数，α 为任意阶导数且 $n-1 \leqslant \alpha < n$。若 α 为整数时，这些导数定义为

$$ {}_{t_1}D_t^{\alpha} f(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\alpha} f(t),\ {}_{t}D_{t_2}^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\alpha} f(t) \tag{3} $$

则分数阶微积分公式为[21]

$$ \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,{}_{t_1}D_t^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,{}_{t}D_{t_2}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{4} $$

其中当 $t=t_1$ 和 $t=t_2$，$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k}=0$。有关系式

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha} f(t) = {}_{t_1}D_t^{\alpha}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \tag{5} $$

2 分数阶 Hamilton 正则方程

假设力学系统由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。分数阶 Lagrange 函数为

$$ L = L(t, q_s, {}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s) \tag{6} $$

引入分数阶广义动量和 Hamilton 函数为

$$ p_{\alpha s} = \frac{\partial L}{\partial_{t_1} D_t^{\alpha} q_s} \tag{7} $$

$$ H(t, p_{\alpha s}, q_s) = p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s - L \tag{8} $$

则

$$ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},\ {}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}} \tag{9} $$

非保守系统的分数阶 Hamilton 原理为

$$ \int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s + p_{\alpha s}\delta_{t_1}D_t^{\alpha} q_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\delta p_{\alpha s} + Q''_s\delta q_s\Big]\mathrm{d}t = 0 \tag{10} $$

其中 Q''_s 为非势广义力，考虑公式（4）、（5），有

$$ \int_{t_1}^{t_2} p_{\alpha s}\delta_{t_1}D_t^{\alpha} q_s\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} {}_{t}D_{t_2}^{\alpha} p_{\alpha s}\delta q_s\,\mathrm{d}t \tag{11} $$

将（11）式代入（10）式，于是得到

$$ \int_{t_1}^{t_2}\delta p_{\alpha s}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\right) - \delta q_s\left[{}_{t}D_{t_2}^{\alpha} p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} + Q''_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{12} $$

将式（9）代入式（12），并考虑积分区间的任意性以及 δq_s 的独立性，得到

$$ {}_{t}D_{t_2}^{\alpha} p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} + Q''_s = 0 \tag{13} $$

联立方程（9）和（13）给出非保守系统力学的分数阶 Hamilton 正则方程。如果非势广义力 $Q''_s=0$，则方程（9）和（13）就成为

$$ {}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}} = 0,\ {}_{t}D_{t_2}^{\alpha} p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0 \tag{14} $$

方程（14）给出力学系统的分数阶 Hamilton 正则方程。

3 相空间中分数阶 Hamilton 作用量的变分

相空间中分数阶 Hamilton 作用量为

$$ S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2}(p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha} q_s - H)\,\mathrm{d}t \tag{15} $$

其中 γ 为某已知曲线。引入 r 参数群的无限小群变换为

$$ \bar{t} = t + \Delta t,\ \bar{q}_s(\bar{t}) = q_s + \Delta q_s,\ \bar{p}_s(\bar{t}) = p_s + \Delta p_s,\ (s=1,2,\cdots,n) \tag{16} $$

其展开式为

$$ \bar{t} = t + \varepsilon_\sigma \xi_0^\sigma,\ \bar{q}_s(\bar{t}) = q_s + \varepsilon_\sigma \xi_s^\sigma,\ \bar{p}_s(\bar{t}) = p_s + \varepsilon_\sigma \eta_s^\sigma,\ (s=1,2,\cdots,n) \tag{17} $$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无限小参数，$\xi_0^\sigma, \xi_s^\sigma$ 为无限小生成元或生成函数。在变换（16）下，分数

阶 Hamilton 作用量（15）变为

$$S(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t})\,{}_{\bar{t}_1}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) - \bar{H}(\bar{t},\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t}),\bar{q}_s(\bar{t})))\,\mathrm{d}\bar{t} \tag{18}$$

其中 $\bar{\gamma}$ 为 γ 的邻近曲线。因此，我们有

$$S(\bar{\gamma}) - S(\gamma) = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \Big[\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t})\,{}_{\bar{t}_1}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) - H(\bar{t},\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t}),\bar{q}_s(\bar{t}))\Big]\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_1}^{t_2} (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{\Big[\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t})\,{}_{\bar{t}_1}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) - H(\bar{t},\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t}),\bar{q}_s(\bar{t}))\Big]\cdot \left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right) - (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\Big\}\mathrm{d}t \tag{19}$$

假设 ΔS 是变换前后的差 $S(\bar{\gamma}) - S(\gamma)$ 相对 ε 的主线性部分，则有

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\Delta p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s + p_{\alpha s}\Delta\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\Delta p_{\alpha s} + (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\Big]\mathrm{d}t \tag{20}$$

注意到

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t,\ \delta p_s = \Delta p_s - \dot{p}_s\Delta t,$$
$$\Delta\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s = {}_{t_1}D_t^{\alpha}\delta q_s + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s\right)\Delta t \tag{21}$$

以及变换（17）和交换关系（4）、（5），则式（20）可化为

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{\sigma}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\xi_0^{\sigma}p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s + \int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_{\theta}^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma}p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^{\sigma}\,{}_{\theta}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big] + \bar{\xi}_s^{\sigma}\left({}_tD_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s}\right) + \bar{\eta}_{\alpha s}^{\sigma}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\right)\Big\}\mathrm{d}t \tag{22}$$

其中

$$\bar{\xi}_s^{\sigma} = \xi_s^{\sigma} - \dot{q}_s\xi_0^{\sigma},\ \bar{\eta}_{\alpha s}^{\sigma} = \eta_{\alpha s}^{\sigma} - \dot{p}_{\alpha s}\xi_0^{\sigma},\ (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{23}$$

式（20）和式（22）称为相空间中力学系统的分数阶 Hamilton 作用量变分的基本公式。

4　相空间中分数阶 Noether 准对称性

下面给出相空间中非保守系统的分数阶 Noether 准对称性的定义和判据。

设 H_1 是某个另外的分数阶 Hamilton 函数，如果无限小群变换（16）精确到一阶小量满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2}(p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\,\mathrm{d}t = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}\Big[\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t})\,{}_{\bar{t}_1}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{q}_s(\bar{t}) - H_1(\bar{t},\bar{q}_s(\bar{t}),\bar{p}_{\alpha s}(\bar{t}))\Big]\mathrm{d}\bar{t} + \int_{t_1}^{t_2}Q''_s\delta q_s\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

则相应不变性称为分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13）的 Noether 准对称性。于是有

定义 1　对于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13），如果在无限小群变换（16）作用下，满足条件

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q''_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t \tag{25}$$

其中 $G = G(t,q_s,p_{\alpha s})$ 为规范函数，则相应不变性称为该系统的分数阶 Noether 准对称性。

由定义 1 和公式（20）和（22），得到如下判据：

判据 1　如果无限小群变换（16），满足条件

$$\Delta p_{\alpha s}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\right) + p_{\alpha s}\Delta\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s + Q''_s(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) + (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta G \tag{26}$$

则变换（16）相应于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13）的分数阶 Noether 准对称性。

式（26）可表为

$$p_{\alpha s}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s\xi_0^{\sigma}\right) - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^{\sigma} - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^{\sigma} + Q''_s\bar{\xi}_s^{\sigma} + (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\dot{\xi}_0^{\sigma} = -\dot{G},\ (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{27}$$

其中 $\Delta G = \varepsilon_{\sigma}G^{\sigma}$。当 $r = 1$ 时，式（27）称为给定系统的分数阶 Noether 等式。

判据 2　如果无限小群变换（17），满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_{\theta}^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma}p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^{\sigma}\,{}_{\theta}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s}(\theta))\,\mathrm{d}\theta + (p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - H)\xi_0^{\sigma} + G\Big] + \bar{\xi}_s^{\sigma}\left({}_tD_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} + Q''\right) + \bar{\eta}_{\alpha s}^{\sigma}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\right) = 0,\ (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{28}$$

则变换（17）相应于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13）的分数阶 Noether 准对称变换。

利用判据 1 - 判据 2，或分数阶 Noether 等式（27）可以分别判断相空间中非保守力学系统的分数阶 Noether 准对称性。

5 相空间中分数阶 Noether 理论

下面我们研究相空间中分数阶模型下非保守力学系统的分数阶 Noether 准对称性与守恒量之间的关系。首先给出相空间中分数阶守恒量的定义。

定义 2 函数 $I(t,p_{\alpha s},q_s)$ 称为分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13）的分数阶守恒量，当且仅当沿着运动微分方程（13）的解曲线恒成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t,q_s,p_{\alpha s}) = 0 \tag{29}$$

对于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13），如果能找到系统的分数阶 Noether 准对称性，便可求得相应的分数阶守恒量。于是，有如下定理：

定理 1 对于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统（9）和（13），如果无限小群变换（16）相应于定义 1 意义下的分数阶 Noether 准对称性，则系统存在 r 个线性独立的分数阶守恒量，形如

$$I^\sigma = \int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_\theta^\alpha \bar{\xi}_s^\sigma p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^\sigma\, {}_\theta D_{t_2}^\alpha p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta + \xi_0^\sigma(p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H) + G^\sigma = const.\ (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{30}$$

证明：由定义 1，将方程（13）代入和判据 2，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_\theta^\alpha \bar{\xi}_s^\sigma p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^\sigma\, {}_\theta D_{t_2}^\alpha p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta + \xi_0^\sigma(p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H) + G^\sigma\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_\theta^\alpha \bar{\xi}_s^\sigma p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^\sigma\, {}_\theta D_{t_2}^\alpha p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta + \xi_0^\sigma(p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H) + G^\sigma\Big] = 0,\ (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{31}$$

对（31）式进行积分，便得到结果。

定理 1 称为分数阶模型下的相空间中非保守力学系统的分数阶 Noether 定理。由分数阶 Noether 定理可知，对于分数阶模型下的相空间中非保守力学系统，如果能找到系统的一个分数阶 Noether 准对称变换，便可能得到系统的一个分数阶守恒量。

6 特例讨论：分数阶 Hamilton 系统

如果取非势广义力 $Q''_s = 0$，则定义 1，判据 1 和判据 2 成为：

定义 3 对于分数阶 Hamilton 系统（14），如果在无限小群变换（16）的作用下，满足条件

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{32}$$

则相应不变性称为该系统的分数阶 Noether 准对称性。

由定义 3 和公式（20）和（22），可得如下判据：

判据 3 如果无限小群变换（16），如果满足条件

$$\Delta\, p_{\alpha s}\Big({}_{t_1}D_t^\alpha q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\Big) + p_{\alpha s}\Delta\, {}_{t_1}D_t^\alpha q_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta\, t - \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta\, q_s + (p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\, t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\, G \tag{33}$$

则变换（16）是相空间中分数阶 Noether 准对称变换。

式（33）可表为：

$$p_{\alpha s}\Big({}_{t_1}D_t^\alpha \bar{\xi}_s^\sigma + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^\alpha q_s \xi_0^\sigma\Big) - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^\sigma - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^\sigma + (p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H)\dot{\xi}_0^\sigma = -\dot{G},(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{34}$$

当 $r = 1$ 时，式（34）称为分数阶 Hamilton 系统的分数阶 Noether 等式。

判据 4 如果无限小群变换（17），满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_\theta^\alpha \bar{\xi}_s^\sigma p_{\alpha s}(\theta) - \bar{\xi}_s^\sigma\, {}_\theta D_{t_2}^\alpha p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta + (p_{\alpha s\,t_1}D_t^\alpha q_s - H)\xi_0^\sigma + G\Big] + \bar{\xi}_s^\sigma({}_tD_{t_2}^\alpha p_{\alpha s} - \frac{\partial H}{\partial q_s}) + \bar{\eta}_{\alpha s}^\sigma({}_{t_1}D_t^\alpha q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}) = 0,(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{35}$$

则变换（17）相应于分数阶 Hamilton 系统（14）的分数阶 Noether 准对称性。

利用判据 3 – 判据 4 或分数阶 Noether 等式（34），可以判断分数阶 Hamilton 系统的分数阶 Noether 准对称性。

由定理 1，如果能找到分数阶 Noether 准对称性，便有可能找到相应的分数阶守恒量。

定理 2 对于分数阶 Hamilton 系统（14），如果无限小群变换（16）相应于定义 3 意义下的分数阶 Noether 准对称性，则系统存在 rr 个线性独立的分数阶守恒量（30）。

如果非势广义力 $Q''_s = 0$，并且 $G = 0$，则定义 1，判据 1 和判据 2 成为：

定义 4 对于分数阶 Hamilton 系统（14），如果在无限小群变换（16）的作用下，满足条件

$$\Delta S = 0 \tag{36}$$

则相应不变性称为该系统的分数阶 Noether 对称

性。

判据 5　对于无限小群变换（16），满足条件

$$\Delta p_{\alpha s}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s-\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}}\right)+p_{\alpha s}\Delta\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s-\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t-\frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s+(p_{\alpha s}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s-H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)=0 \tag{37}$$

则变换（16）相应于分数阶 Hamilton 系统（14）的分数阶 Noether 对称性。

式（37）可表为：

$$p_{\alpha s}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s\xi_0^{\sigma}\right)-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^{\sigma}-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^{\sigma}+(p_{\alpha s\,t_1}D_t^{\alpha}q_s-H)\dot{\xi}_0^{\sigma}=0,(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{38}$$

当 $r=1$ 时，式（38）称为相空间中给定系统的分数阶 Noether 等式。

判据 6　如果无限小群变换（17），满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_{\theta}^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma}p_{\alpha s}(\theta)-\bar{\xi}_s^{\sigma}\,{}_{\theta}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta+(p_{\alpha s\,t_1}D_t^{\alpha}q_s-H)\xi_0^{\sigma}\right]+\bar{\xi}_s^{\sigma}({}_{t}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s}-\frac{\partial H}{\partial q_s})+\bar{\eta}_{\alpha s}^{\sigma}({}_{t_1}D_t^{\alpha}q_s-\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha s}})=0,(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{39}$$

则变换（17）是相应于分数阶 Hamilton 系统（14）的分数阶 Noether 对称性。

利用判据 5 – 判据 6 或分数阶 Noether 等式（38）可以判断分数阶 Hamilton 系统的分数阶 Noether 对称性。

对于分数阶 Hamilton 系统（14），如果能找到系统的分数阶 Noether 对称性，便有可能找到相应的分数阶守恒量。于是，相应的定理 1 就成为：

定理 3　对于分数阶 Hamilton 系统（14），如果无限小群变换（16）相应于定义 4 意义下的分数阶 Noether 对称性，则系统存在 r 个独立的分数阶守恒量，形如

$$I^{\sigma}=\int_{t_1}^{t}({}_{t_1}D_{\theta}^{\alpha}\bar{\xi}_s^{\sigma}p_{\alpha s}(\theta)-\bar{\xi}_s^{\sigma}\,{}_{\theta}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha s}(\theta))\mathrm{d}\theta+\xi_0^{\sigma}(p_{\alpha s\,t_1}D_t^{\alpha}q_s-H)=const.\,(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{40}$$

定理 2 和定理 3 称为分数阶 Hamilton 系统的分数阶 Noether 定理。由分数阶 Noether 定理可知，对于分数阶模型下的相空间中力学系统，如果能找到一个分数阶 Noether 对称性，便有可能得到系统的一个分数阶守恒量。

7　算　例

例 1　设力学系统的分数阶 Lagrange 函数和广义非势力为

$$L=\frac{1}{2}m({}_{t_1}D_t^{\alpha}q)^2,Q''=-c\dot{q} \tag{41}$$

其中 c 为常数。

则系统的分数阶广义动量和 Hamilton 函数为

$$p_{\alpha}(t)=m_{t_1}D_t^{\alpha}q,H=\frac{1}{2m}p_{\alpha}^2 \tag{42}$$

系统的运动微分方程为

$${}_{t_1}D_t^{\alpha}q-\frac{1}{m}p_{\alpha}=0,{}_{t}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha}+c\dot{q}=0 \tag{43}$$

由分数阶 Noether 等式（27），得到

$$p_{\alpha}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}\bar{\xi}_1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q\xi_0\right)-c\dot{q}\bar{\xi}_1+(p_{\alpha t_1}D_t^{\alpha}q-H)\dot{\xi}_0=-\dot{G} \tag{44}$$

方程（44）有解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,G=cq+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^{t_2}p_{\alpha}(t)(t_2-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t \tag{45}$$

生成元和规范函数（45）相应于系统的分数阶广义 Noether 准对称性。根据定理 1，得到

$$I=cq+\int_{t_1}^{t}(p_{\alpha}(\theta)_{t_1}D_{\theta}^{\alpha}1-{}_{\theta}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha}(\theta))\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^{t_2}p_{\alpha}(t)(t_2-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t=\mathrm{const} \tag{46}$$

式（46）为基于分数阶模型的相空间中非保守力学系统的 Noether 广义准对称性（45）直接导致的守恒量。若 $\alpha\to 1$，则守恒量（46）就成为

$$I=p+cq=const. \tag{47}$$

则式（47）为相空间中非保守力学系统的 Noether 广义准对称性导致的守恒量。

例 2　已知分数阶的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}({}_{t_1}D_t^{\alpha}q)^2-\frac{\omega^2}{2}q^2 \tag{48}$$

由式（7）和（8），得到

$$p_{\alpha}={}_{t_1}D_t^{\alpha}q,H=\frac{1}{2}p_{\alpha}^2+\frac{\omega^2}{2}q^2 \tag{49}$$

则系统的正则方程为

$${}_{t_1}D_t^{\alpha}q-p_{\alpha}=0,{}_{t}D_{t_2}^{\alpha}p_{\alpha}-\omega^2q=0 \tag{50}$$

分数阶 Noether 等式（34），得到

$$p_{\alpha}\left({}_{t_1}D_t^{\alpha}\bar{\xi}_1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_{t_1}D_t^{\alpha}q\xi_0\right)-\omega^2q\xi_1+(p_{\alpha t_1}D_t^{\alpha}q-H)\dot{\xi}_0=0 \tag{51}$$

方程（51）有解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = 0 \tag{52}$$

生成元（52）相应于系统的分数阶 Noether 对称性。由定理1，得到

$$I = \int_{t_1}^{t}(-{}_{t_1}D_\theta^\alpha \dot{q}(\theta)\ p_\alpha(\theta) + \dot{q}(\theta)\,{}_\theta D_{t_2}^\alpha p_\alpha(\theta))\mathrm{d}\theta +$$

$$p_\alpha\, {}_{t_1}D_t^\alpha q - \frac{1}{2}[p_\alpha^2 + \omega^2 q^2] = \text{const.} \tag{53}$$

（53）式是所论系统相应于分数阶 Noether 对称性（51）的分数阶守恒量。

若 $\alpha \to 1$ 时，守恒量（53）就成为

$$I = -\frac{1}{2}[p^2 + \omega^2 q^2] = \text{const.} \tag{54}$$

式（54）是所论系统的 Noether 对称性的守恒量。

8 结 论

自然界的本质是分数阶的，因此应用分数阶模型可以更准确地描述复杂系统的力学与物理行为。本文基于 Riemann – Liouville 分数阶导数建立了相空间中分数阶 Hamilton 原理，导出了非保守力学系统的分数阶 Hamilton 正则方程（9）和（13）；得到了相空间中分数阶 Hamilton 作用量变分的两个基本公式（20）和（22）；给出了相空间中非保守系统动力学的分数阶 Noether 准对称性的定义和判据；研究了所论系统的分数阶 Noether 对称性及其相应守恒量之间的内在联系。文章的方法和结果具有普遍适用性，也可以应用于分数阶模型下的最优控制系统，以及分数阶模型下的 Birkhoff 系统等。

致谢：作者对张毅教授的悉心指导深表感谢！

参考文献：

[1] OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus [M]. New York: Academic Press, 1974.

[2] SAMKO S G, KIBAS A A, MARICHEV O I. Fractional integrals and derivatives, theory and applications [M]. Switzerland: Gordon and Breach Sciences Publishers, 1993.

[3] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[4] MAGIN R L. Fractional calculus in bioengineering [M]. Redding, CT: Begell House Inc, 2006.

[5] 周激流,蒲亦非,廖科. 分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用[M]. 北京:科学出版社, 2010.

[6] 孙文,孙洪广,李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京:科学出版社, 2010.

[7] RIEWE F. Nonconservation lagrangian and Hamiltonian mechanics[J]. Phys Rev E, 1996, 53(2): 1890 – 1899.

[8] RIEWE F. Mechanics with fractional derivatives [J]. Phys Rev E, 1997, 55(3): 3581 – 3592.

[9] AGRAWAL O P. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems[J]. J Math Anal Appl, 2002, 272(1): 368 – 379.

[10] CRESSON J. Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems[J]. J Math Phys, 2007, 48(3): 033504.

[11] BALEANU D, TRUJILLO J I. A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations with Caputo fractional derivatives[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2010, 15(5): 1111 – 1115.

[12] RABEI E M, RAWASHDEH I M, MUSLIH S AND BALEANU D. Hamilton-Jacobi formulation for systems in terms of Riesz's fractional derivatives[J]. Int J Theor Phys, 2011, 50(5): 1569 – 1576.

[13] KLIMEK M. Lagrangian and Hamiltonian fractional sequential mechanics[J]. Cze J Phys, 2002, 11(52): 1247 – 1253.

[14] MUSLIH S I, EL-ZALAN H A. Hamiltonian formulation of system with higher order derivatives[J]. Int J Theor Phys, 2007, 46(12): 3150 – 3158.

[15] RABEI E M, MUSLIH S I, BALEANU D. The Hamilton formalism with fractional derivatives[J]. J Math Analy Appl, 2007, 327(2): 891 – 897.

[16] HERALLAH M A E, BALEANU D. Fractional order Euler-Lagrange equations and formulation of Hamiltonian equations[J]. Nonlinear Dyn, 2009, 58(1/2): 385 – 391.

[17] JARAD F, ABDELJAWAD T, BALEANU D. Fractional variational optimal control problems with delayed argument[J]. Nonlinear Dyn, 2010, 62 (3): 609 – 614.

[18] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Nonconservative Noether's theorem in optimal control[J]. Int J Tomogr Stat, 2007, 5(W07): 109 – 114.

[19] FREDERICO G S F, TORRES D F M. A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations[J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(2): 834 – 846.

[20] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Noether's theorem for fractional optimal control problems[J]. Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Portugal, 2006: 142 – 147.

[21] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Fractional conservation laws in optimal control theory[J]. Nonlinear Dyn, 2008, 53(3): 215 – 222.

[22] MALINOWSKA A B, TORRES D F M. Introduction to the Fractional Calculus of Variations[M]. London: Imperial College Press, 2012, 11 – 65.

（下转第48页）

$$\int_2^\infty \prod_{2<t_k<s}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{5}{3}}\left[\frac{1}{s^2}s^{\frac{5}{3}}\right]\mathrm{d}s \geqslant \int_2^\infty \frac{1}{s^{1/3}}\mathrm{d}s = \infty$$

所以，根据定理 1 得方程（32）是振动的。

参考文献：

[1] DAS S. Functional fractional calculus for system identification and controls [M]. New York: Springer,2008.

[2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science BV, 2006.

[3] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations [M]. Lect Notes Math, 2010.

[4] AGARWAL RAVI P, LAKSHMIKANTHAMA V, NIETO JUAN J. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty [J]. Nonlinear Analysis, 2010,72: 2859 – 2862.

[5] ZHOU Y, WANG J R. On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17 (7): 3050 – 3060.

[6] CHEN D X. Oscillation criteria of fractional differential equations [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 33:1 – 10.

[7] HAN H L, ZHAO Y G, SUN Y, et al. Oscillation for a class of fractional differential equation [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013, 2013(390282):1 – 6.

[8] ZHENG B, FENG Q H. Some new oscillation criteria for a class of nonlinear fractional differential equations with damping term [J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013(912072):1 – 11.

[9] LU W, GE W G, ZHAO Z H. Oscillatory criteria for third-order nonlinear difference equation with impulses [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234:3366 – 3372.

[10] 仉志余,王晓霞,林诗仲,等. 非线性二阶中立型时滞微分方程的振动和非振动准则[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 325 – 334.

[11] WANG Q R. Oscillation and asymptotics for second-order half-linear differential equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 122: 253 – 266.

[12] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of impulsive differential equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[13] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

（上接第 42 页）

[23] ATANACKOVIĆ T M, KONJIK S, SIMIĆ S. Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Noether's theorem [J]. Nonlinear Analy, 2009, 71 (5/6): 1504 – 1517.

[24] LUO S K, LI L. Freactional generalized Hamiltonian mechanics and Poisson conservation law in terms ofcombined Riesz derivatives [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73 (1/2): 639 – 647.

[25] ZHOU S, FU J L, LIU Y S. Lagrange equations of nonholonomic systems with fractional derivatives [J]. Chin Phys B, 2010, 19 (12): 120301.

[26] ZHOU S, FU J L. Symmetry theories of Hamiltonian systems with fractional derivatives [J]. Scientia Sinica Phys, Mech & Astron, 2011, 54 (10): 1847 – 1853.

[27] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73 (1/2): 783 – 793.

[28] 张毅. 相空间中类分数阶 Noether 对称性与守恒量 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52 (4): 20 – 25.

[29] LONG Z X, ZHANG Y. Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral [J]. Int J Theor Phys, 2014, 53 (3): 841 – 855.

[30] CHEN J, ZHANG Y. Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for disturbed Hamiltonian systems based on El-Nabulsi nonconservative dynamics model [J]. Nonlinear Dyn, 2014, 77, 353 – 360.

[31] LONG Z X, ZHANG Y. Fractional action-like variational problem and its symmetry for a nonholonomic system [J]. Acta Mech, 2014, 225 (1): 77 – 90.

[32] 龙梓轩, 张毅. 基于按正弦周期拓展的分数阶积分的类分数阶 Noether 定理 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52 (5): 51 – 56.

[33] 丁金凤, 张毅. 基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的 Noether 对称性 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2014, 53 (5): 12 – 16.